Ślady

Zadanie 1. Sprawdzić, że nieciągła nieograniczona funkcja $\log\log\left(e + \frac{1}{|x|}\right)$ należy do przestrzeni $W^{1/2,2}(\mathbb{R})$.
Wskazówka. Wystarczy sprawdzić, że posiada przedłużenie do funkcji z $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ (zresztą zadane tym samym wzorem).

Zadanie 2. Przyjmijmy $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 1$ i określmy obszar

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^\alpha\}$$

oraz funkcję

$$u\colon \Omega \to \mathbb{R}, \qquad u(x, y) = x^{1-\beta} \qquad (1 < \beta < \tfrac{\alpha+1}{p}).$$

Sprawdzić, że $u \in W^{1,p}(\Omega)$, ale jeśli β jest dostatecznie blisko $\frac{\alpha+1}{p}$, to u nie posiada przedłużenia do funkcji w $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.
Wskazówka. Osobno rozważyć przypadki $1 \leqslant p < 2$, $p = 2$, $p > 2$.

Zadanie 3. Zdefiniować liniowy ograniczony operator przedłużania funkcji $u \in C^k(\overline{\mathbb{R}^+})$ do $\overline{u} \in C^k(\mathbb{R})$ (i w rezultacie również $W^{k,p}(\mathbb{R}^+) \to W^{k,p}(\mathbb{R})$, podobnie w wyższych wymiarach).
Wskazówka. Dla $x > 0$ przyjąć $\overline{u}(x) = \alpha_0 u(-x) + \ldots + \alpha_k u(-2^{-k}x)$ z odpowiednio dobranymi współczynnikami $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$.

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli Ω ma dostatecznie gładki brzeg, to funkcje gładkie aż do brzegu $C^\infty(\overline{\Omega})$ (czyli obcięcia funkcji gładkich na trochę większym obszarze) są gęste w $W^{k,p}(\Omega)$.
Wskazówka. Skorzystać z przedłużania do $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 5. Sprawdzić, że jeśli $u \in W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$, a $L \subseteq \mathbb{R}^n$ jest hiperpłaszczyzną, to $\operatorname{tr}_L u$ należy do $W^{1,1}(L)$ oraz zachodzi zgodność pochodnych kierunkowych

$$D_v \operatorname{tr}_L u = \operatorname{tr}_L D_v u \qquad \text{dla } v \in L.$$

Zadanie 6. Wykazać, że $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ wkłada się w sposób ciągły w $C_b(\mathbb{R}^n)$.
Wskazówka. Iteracyjnie stosując własność z poprzedniego zadania, zadać ciągły funkcjonał ewaluacji $u \mapsto u(x)$.

Zadanie 7. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie dostatecznie gładkim obszarem ograniczonym. Wykazać wzór na całkowanie przez części

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi + \int_\Omega \nabla u \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} u\varphi \cdot \vec{n} \quad \text{dla } u \in W^{1,p}(\Omega),\ \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

gdzie wyraz brzegowy rozumiemy w sensie śladu.

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ i $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n_-)$, to funkcja w zadana wzorem

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n_+, \\ v(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n_- \end{cases}$$

należy do $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = v$ na $\mathbb{R}_{n-1} \times \{0\}$ w sensie śladu.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli funkcja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ zeruje się na półprzestrzeni $\mathbb{R}^n_+ = \{x_n < 0\}$, to leży w domknięciu funkcji klasy $C^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$.
Wskazówka. Najpierw wykazać tę samą tezę przy mocniejszym założeniu zerowania się na $\{x_n < 2\varepsilon\}$, a następnie skorzystać z ciągłości odwzorowania

$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto u(\cdot - v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Zadanie 10. (charakteryzacja $W^{1,p}_0(\Omega)$) Wykazać, że jeśli Ω jest dostatecznie gładkim obszarem ograniczonym, to następujące warunki są równoważne:

(1) $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, czyli u leży w domknięciu funkcji klasy $C^\infty_c(\Omega)$;

(2) funkcja

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ 0 & \text{dla } x \notin \Omega \end{cases}$$

należy do $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$;

(3) ślad u jest funkcją zerową.

Zadanie 11. Wykazać, że dla dostatecznie gładkiego obszaru Ω ślad można wyliczyć poprzez średnie:

$$\operatorname{tr} u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{\mathbf{B}_r(x)\cap\Omega} u(y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{dla } \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.w. } x \in \partial\Omega.$$

Uwaga. Żeby się nie przemęczać, rozważyć wyłącznie $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ i średnie po kostkach (zamiast po kulach). Wykazać, że

$$\left| \fint_{Q_r(x)\cap\partial\Omega} \operatorname{tr} u(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) - \fint_{Q_r(x)\cap\Omega} u(y)\, \mathrm{d}y \right| \lesssim \frac{1}{r^{n-1}} \int_{Q_r(x)\cap\Omega} |\nabla u(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Zadanie 12. Ponieważ operacja $u \mapsto u_+$ jest dobrze określona zarówno na $W^{1,p}(\Omega)$ jak i $L^p(\partial\Omega)$, dodatnią część śladu można zdefiniować jako $\operatorname{tr} u_+$ lub $(\operatorname{tr} u)_+$. Pokazać, że te dwie funkcje są identyczne.